Анализ на задача 4 – Пътуване

Задачата накратко е следната: даден ни е неориентиран претеглен граф и се търси максималната средна цена на цикъл в графа. Ограниченията също не са за пренебрегване – върховете са до 1000, а ребрата до 2000.

Освен не много големите ограничения, другото нещо, което прави впечатление, е малката точност на отговора, която се изисква. Това (и в допълнение със самата същност на задачата) ни навежда към мисълта да помислим за двоично търсене по отговора. По-трудната част е да измислим как можем да проверим дали дадена стойност α е по-малка или по-голяма от търсения отговор.

Нека цикълът с максимална средна цена е съставен от ребрата e1, e2, … , ek (началото на e1 съвпада с края на еk), които имат цена c(e1), c(e2), … , c(ek). Означаваме тази средна цена с

x = (c(e1) + c(e2) + … + c(ek)) / k

или kx = c(e1) + c(e2) + … + c(ek)

Да допуснем, че по време на двоичното търсене правим проверка за стойността α и правим следната модиикация на графа – на всяко ребро e съпоставяме нова стойност

w(e) = α – c(e)

При α < x имаме

w(e1) + w(e2) + … + w(ek) = (α – c(e1)) + (α – c(e2)) + … + (α – c(ek)) = kα – c(e1) – c(e2) - … - c(ek)

w(e1) + w(e2) + … + w(ek) = kα – kx = k(α – x) < 0

Това означава, че в модифицирания граф можем да намерим отрицателен цикъл, което може да се провери чрез пускане на алгоритъма Ford-Bellman.

Действително наличието на отрицателен цикъл при проверката за α ни е достатъчно, за да твърдим, че стойността α е по-малка от търсения от нас отговор x. Ако няма отрицателен цикъл в трансформирания от нас граф, това означава, че α е по-голямо от всички средни цени на всички цикли (и тъй като сме избрали по дефиниция x да бъде най-голямата средна цена от всички, то α > x).

И така, вече можем да определяме дали тестваната от нас стойност α е по-малка или по-голяма от действителния отговор, който търсим. Единствено остана да приложим двоичното търсене по отговора. Тъй като то се извършва върху дробни числа, препоръчително е да се използва фиксиран брой итерации. Броят итерации в авторовото решение е 40. Така сложността на цялото решение е О(40 \* N \* M) – 40 пъти изпълнението на Ford-Bellman за търсенето на отрицателен цикъл.

Автор: Момчил Пейчев