Хипстъри (анализ)

A5 / 320

Това, за което трябва да се сети човек, е че „естетическото разстояние“ между две неотрицателни цели числа всъщност е сборът от дължините им минус два пъти дължината на общия им префикс, ако ги разглеждаме като низове. Например:

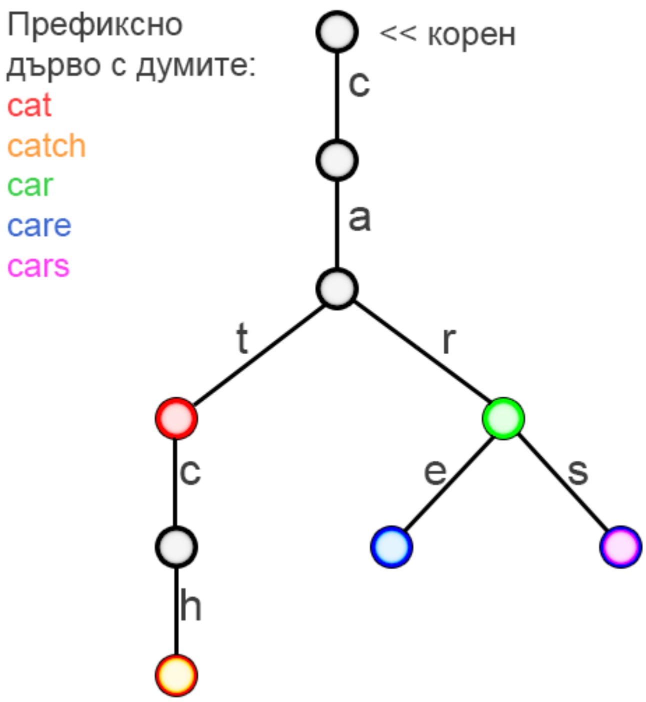
123456

12358943

Това е защото вместо да „долепяме“ цифра до едно от числата (т.е. да го умножаваме по 10 и да го събираме с цяло число от 0 до 9), можем просто да разделяме другото на 10 целочислено. Затова и двете числа се разделят, докато не станат и двете равни на този техен общ префикс.

Префиксно дърво

Префиксното дърво се използва за низове, а не за числа, но никой не е казал, че числата не могат да се разглеждат като низове. В префиксното дърво, всеки връх отговаря на низ и всяко ребро – на един символ. Коренът отговаря на празния низ (“”). Всеки друг връх съответства на низ, съставен от символите в ребрата от корена до върха. Всеки връх с дълбочина n отговаря на низ с дължина n, естествено:



А как може да се използва префиксното дърво в тази задача? Нека са добавени числата 1812, 18321, 184242 и 18420 в някакво префиксно дърво. Разбира се, те всъщност са низовете “1812,” “18321,” “184242,” “18420.” Да сравним “18” с тях.

18

1812

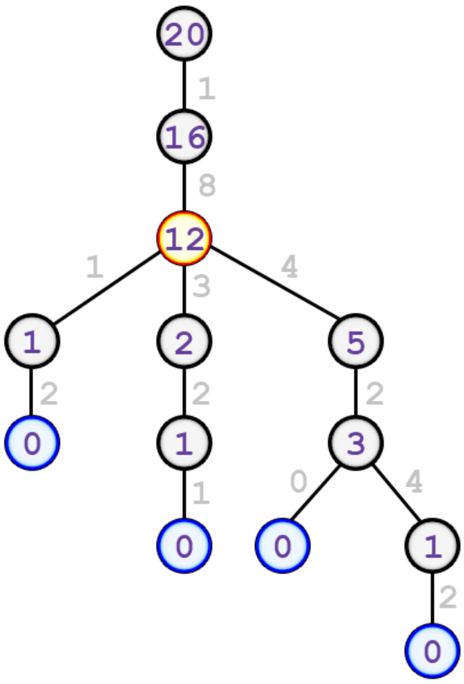
18321

184242

18420

Разликата между техните дължини и тази на “18” е точно естетическото разстояние между тях и 18. Тогава разстоянието между 18 и и всички числа, започващи с 18, е сборът на разстоянията между върха на “1812” и този на “18”, между върха на „18321” и този на “18” и т.н.

Така можем за всеки връх в префиксното дърво да помним какво е общото разстояние от него до всички думи, свършващи под него. Това общо разстояние във всеки връх е равно на сбора на общите разстояния на децата му плюс броя на “любимите” върхове в поддървото му (освен него). В гореописания пример, във върха на “18” би се съдържала стойност равна на 2+3+3+4 = 12. Ето изображение, показващо тази стойност във всички върхове, където и лесно се вижда, че 2+3+3+4 е равно на сумата на разстоянията от оранжевия връх до всеки син връх:



Но какво става, ако това число не е префикс на всички други? Нека връх i е върхът, съответстващ на числото i, всеки връх е “любим”, ако числото i е любимо на някого, сумата на разстоянията до всички любими върхове в поддървото на връх i е d[i] и броят на любимите върхове в поддървото на връх i е c[i].

Нека първо вземем разстоянието от върха на x до всички любими в неговото поддърво. После на всяка стъпка се придвижваме нагоре като добавяме разстоянието между текущия връх и всички любими в поддървото му **без тези в поддървото на стария връх**. Освен това добавяме и разстоянието от началния връх до текущия, умножено по броя на любимите върхове в поддървото на текущия без тези в поддървото на стария. Тогава разстоянието между x и всички други досега добавени числа е равно на:

d[x] +

d[x/10] - (c[x] + d[x]) + 1*(c[x/10] - c[x]) +

d[x/100] - (c[x/10] + d[x/10]) + 2*(c[x/100] - c[x/10]) +

d[x/1000] - (c[x/100] + d[x/100]) + 3*(c[x/1000] - c[x/100]) +

...

Тъй като едно число влияе само на върховете на пътя от връх 0 до върха, съответстващ на числото, когато се добавя или премахва число, трябва само да се обновят толкова на брой върхове, колкото са цифрите на числото плюс едно. На заявките също се отговаря със сложност, равна на цифрите на числото. Затова общата сложност на решението е $O((log_{10}10000000 + 1) * Q) = O(8 * Q) \approx O(Q)$. А нужната памет за дървото с дадените ограничения е $4 * 13 * log_{10}10000000 * Q$ байта, което е под 80MB - напълно допустимо.